SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE FONDAMENTALE CON SUPPORTO SINGOLARE CONTENUTO IN UN SEMISPAZIO E SURIETTIVITA' DI OPERATORI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI

19, 26 NOVEMBRE, 3 DICEMBRE 1981

L'esposizione che segue è dedicata al problema dell'esistenza di una soluzione fondamentale, con supporto singolare in un semispazio, di un polinomio differenziale $P(D)$ su R^n, $D = (D_1,\dots,D_n)$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,n$, ed al problema con questo connesso, della suriettività di $P(D)$ rispetto a certi spazi di Gevrey.

Le notazioni saranno quelle abituali nella teoria delle equazioni a derivate parziali. Ci saranno utili inoltre alcuni spazi di funzioni e di ultradistribuzioni di cui riportiamo qui le principali proprietà.

1. ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE FONDAMENTALE CON SUPPORTO SINGOLARE CONTENUTO IN UN SEMISPAZIO.

1.1. ALCUNI SPAZI DI FUNZIONI E DI ULTRADISTRIBUZIONI.

Se $\rho > 0$, Ω è un aperto di R^ν e c è un numero positivo, indichiamo con $C^\infty(\rho,\Omega,c)$ lo spazio di Banach delle funzioni $\phi \in C^\infty(\Omega)$ con valori complessi tali che

$$\|\phi\|_{\Omega,c} = \sup_{\alpha\in Z_+^\nu}\ \sup_{x\in\Omega}\ \Gamma(\rho|\alpha|+1)^{-1}\, c^{-|\alpha|}\, |D^\alpha\phi(x)| < \infty ,$$

ove Γ indica la funzione gamma di Eulero. Porremo poi

$$\gamma^{(\rho)}(\Omega) = \bigcap_{\Omega'\subset\subset\Omega} \Big(\bigcap_{c>0} C^\infty(\rho,\Omega',c)\Big)$$

$$\Gamma^{(\rho)}(\Omega) = \bigcap_{\Omega'\subset\subset\Omega} \Big(\bigcup_{c>0} C^\infty(\rho,\Omega',c)\Big).$$

Le stesse notazioni useremo se $\rho \in R^\nu$, $\rho_j > 0$, $j = 1,\dots,\nu$, intendendo che nella definizione di $\|\ \|_{\Omega,c}$ figuri in tal caso $\Gamma(\langle\rho,\alpha\rangle+1)$ in luogo di $\Gamma(\rho|\alpha|+1)$.

Sia $\gamma^{(\rho)}(\Omega)$ che $\Gamma^{(\rho)}(\Omega)$ hanno la struttura di spazio lineare e di algebra rispetto alle operazioni di addizione, moltiplicazione per uno scalare e moltiplicazione ordinaria. Con la famiglia di seminorme $\| \ \|_{\Omega',c}$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, $c > 0$, $\gamma^{(\rho)}(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet ed uno spazio di Montel separabile. Se $\rho = 1$, $\Gamma^{(\rho)}(\Omega)$ coincide con lo spazio $A(\Omega)$ delle funzioni analitiche in Ω e $\gamma^{(\rho)}(R^\nu)$ con lo spazio delle funzioni prolungabili in C^ν con funzioni intere. Inoltre $A(\Omega)$ è un sottospazio denso di $\gamma^{(\rho)}(\Omega)$, $\rho > 1$.
Con $s^{(\rho)}(R^\nu)$ indicheremo lo spazio di tutte le funzioni $\phi \in C^\infty(R^\nu)$ tali che per ogni intero non negativo k ed ogni $c > 0$

$$|\phi|_{k,c} = \sup_{\alpha \in Z_+^\nu} \sup_{x \in R^\nu} (1+|x|)^k c^{-|\alpha|} \Gamma(\rho|\alpha|+1)^{-1} |D^\alpha \phi(x)| < \infty .$$

Con la famiglia di norme $| \ |_{k,c}$ anche $s^{(\rho)}(R^\nu)$ è uno spazio di Fréchet ed uno spazio di Montel separabile. Inoltre l'immersione di $s^{(\rho)}(R^\nu)$ nello spazio $\mathcal{S}(R^\nu)$ di tutte le funzioni C^∞ su R^ν e a decrescenza rapida è continua e con immagine densa. Ovviamente $s^{(\rho)}(R^\nu) \subset \gamma^{(\rho)}(R^\nu)$.
Se $\rho > 1$ porremo $\gamma_o^{(\rho)}(\Omega) = \gamma^{(\rho)}(\Omega) \cap C_o^\infty(\Omega)$. Si può provare che per ogni ricoprimento aperto di Ω esiste una partizione dell'unità con funzioni di $\gamma_o^{(\rho)}(\Omega)$ subordinata a tale ricoprimento.
Ciò consente di sviluppare una teoria analoga e quella delle distribuzioni, partendo da $\gamma_o^{(\rho)}(\Omega)$ anzichè da $C_o^\infty(\Omega)$. Essendo inoltre l'immersione di $\gamma_o^{(\rho)}(\Omega)$ in $C_o^\infty(\Omega)$ continua e con immagine densa, lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ può essere considerato come un sottospazio dello spazio $\gamma_o^{(\rho)'}(\Omega)$ duale di $\gamma_o^{(\rho)}(\Omega)$.
Il duale $\gamma^{(\rho)'}(\Omega)$ di $\gamma^{(\rho)}(\Omega)$ può essere identificato con lo spazio degli elementi di $\gamma_o^{(\rho)'}(\Omega)$ con supporto compatto.

La trasformazione di Fourier $\phi \to \hat{\phi}(\xi) = \int_{R^\nu} e^{-i<x,\xi>} \phi(x)dx$, $\xi \in R^\nu$, $\phi \in L^1(R^\nu)$,[o)] si prolunga agli elementi $u \in \gamma^{(\rho)'}(R^\nu)$ mediante la $u \to \hat{u}(\xi) = u(e^{-i<x,\xi>})$. $\hat{u}(\xi)$ è una funzione che può essere prolungata con una funzione intera su C^ν, detta trasformata di Fourier-Laplace di u. Per la trasformata di Fourier-Laplace di elementi di $\gamma_o^{(\rho)}(R^\nu)$ e di $\gamma^{(\rho)'}(R^\nu)$ vale un teorema analogo a quello di Paley-Wiener-Schwartz. In particolare se K è un sottoinsieme convesso e compatto di R^ν ed

$$H_K(\xi) = \sup_{x \in K} < x,\xi > \quad , \quad \xi \in R^\nu ,$$

si ha che: una funzione intera su C^ν, $\Phi(\zeta)$, è la trasformata di Fourier-Laplace di una funzione $\phi \in \gamma_o^{(\rho)}(K)$ se e soltanto se per ogni $s > 0$ esiste una costante c_s tale che

$$|\Phi(\zeta)| \leq c_s' \exp(-s|\zeta|^{1/\rho} + H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)), \quad \zeta \in C^\nu .$$

Di più, la topologia in $\gamma_o^{(\rho)}(K)$ è equivalente a quella determinata dalla famiglia di seminorme

$$|\hat{\phi}|_{K,s} = \sup_{\zeta \in C^\nu} \{\exp(s|\zeta|^{1/\rho} - H_K(\mathrm{Im}\,\zeta)) \, |\hat{\phi}(\zeta)|\} \quad , \quad s > 0.$$

L'applicazione $\phi \to \hat{\phi}$ è inoltre un isomorfismo (algebrico e topologico) dello spazio $s^{(\rho)}(R^\nu)$ sullo spazio $s_{(\rho)}(R^\nu)$ di tutte le funzioni $\psi \in C^\infty(R^\nu)$ tali che per ogni intero non negativo m ed ogni $s \geq 0$

$$[\psi]_{m,s} = \sup_{\xi \in R^\nu} \exp(s|\xi|^{1/\rho}) \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha \psi(\xi)| < \infty ,$$

dotato della topologia determinata scegliendo $[\ ]_{m,s}$ come seminorme. Gli spazi $s^{(\rho)'}(R^\nu)$ ed $s'_{(\rho)}(R^\nu)$, duali di $s^{(\rho)}(R^\nu)$ ed $s_{(\rho)}(R^\nu)$, sono spazi di

---

o) Scriveremo anche $\mathcal{F}\phi$ in luogo di $\hat{\phi}$.

Schwartz, completi e separabili e spazi di Montel. Entrambi hanno lo spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate come sottospazio. La trasformata di Fourier $\hat{u}$, $\hat{v}$ di elementi $u \in s^{(\rho)'}$ e $v \in s'_{(\rho)}$ è definita dalle formule

$$\hat{u}(\psi) = u(\hat{\psi}) \quad , \quad \psi \in s_{(\rho)} \quad , \quad \hat{v}(\phi) = v(\hat{\phi}), \quad \phi \in s^{(\rho)} .$$

L'applicazione $u \to \hat{u}$ è un isomorfismo di $s^{(\rho)'}$ su $s'_{(\rho)}$.
Per maggiori dettagli sugli spazi introdotti qui sopra rimandiamo a [11], [24], [25], [33].

Se u è una distribuzione o una ultradistribuzione su un aperto $\Omega \subset R^\nu$ e $\sigma \in R^\nu$, $\sigma_j > 0$, $j = 1,\dots,\nu$, chiameremo σ-supporto singolare di u e lo indicheremo con $\text{sing supp}_\sigma u$ il più piccolo chiuso di Ω al di fuori del quale $u \in \Gamma^{(\sigma)}$; nel caso analitico, ossia quando σ è l'elemento di R^n di componenti tutte eguali ad uno, scriveremo anche $\text{sing supp}_a u$ od $a.s.s.u$ in luogo di $\text{sing supp}_1 u$; $\text{sing supp}\, u$ indicherà invece, come d'abitudine, il più piccolo chiuso di Ω al di fuori del quale u è C^∞.

1.2. *ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE FONDAMENTALE CON σ-SUPPORTO SINGOLARE CONTENUTO IN UN SEMISPAZIO.*

Sia H il semispazio di R^n, $\{x \in R^n,\ x_n \geq 0\}$ e sia $P(D)$ un polinomio differenziale su R^n che scriveremo nella forma

$$P(D',D_n) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$$

ove $a_j(D')$, $j = 1,\dots,m$, indica un polinomio in $D' = (D_1,\dots,D_{n-1})$ di grado m_j. Si può provare il seguente risultato.

1.2.1 TEOREMA [10] . Se esistono $k > 1$, $\rho > \sigma' \geq 1$, $\sigma_n \geq 1$ e due costanti positive c_1, c_2 tali che $P(D)$ soddisfi alla

$$(\xi',\tau)\in R^{n-1}\times C\ ,\ |\xi'|>k,\ P(\xi',\tau)=0 \quad \text{implicano}$$

(1.2.1)

$$\operatorname{Im}\tau\geq -c_1|\xi'|^{1/\rho} \quad \text{oppure} \quad \operatorname{Im}\tau\leq -c_2(|\xi'|^{1/\sigma'}+|\operatorname{Re}\tau|^{1/\sigma_n}),$$

allora esiste una soluzione fondamentale $E\in\mathscr{D}'(R;\gamma_0^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ di $P(D)$ tale che, posto $\sigma=(\sigma',\ldots,\sigma',\sigma_n)$

i) sing $\operatorname{supp}_\sigma E\subset H$; precisamente per ogni $x\in \complement H$ ed ogni $\alpha\in Z_+^n$.

$$|D^\alpha E(x)|\leq c^{|\alpha|+1}\,\Gamma(\langle\sigma,\alpha\rangle+1)\,|x_n|^{-(n-1+a)\sigma'-m\sigma_n-\langle\sigma,\alpha\rangle} \tag{1.2.2}$$

ove c è una costante positiva ed a una costante non negativa;

ii) supp $E\subset H$, quando tutte le radici dell'equazione in τ: $P(\xi',\tau)=0$ soddisfano, per $|\xi'|>k$, alla prima delle diseguaglianze in (1.2.1);

iii) supp $E\subset \complement H$, quando tutte le radici dell'equazione in τ: $P(\xi',\tau)=0$ soddisfano, per $|\xi'|>k$, alla seconda delle diseguaglianze in (1.2.1).

1.2.2 OSSERVAZIONI.

a) Dall'ipotesi (1.2.1) segue che

$$\sum_{j=0}^{m}|a_j(\xi')|\neq 0 \quad \text{se} \quad |\xi'|>k \ ,$$ [1)]

e quindi, per un noto risultato [2)] esistono una costante positiva c_o ed un numero reale μ tali che

---

[1)] Si noti che se $n=2$ (ed i polinomi a_j non sono tutti identicamente nulli) esiste sempre un $k>0$ per cui $\sum_{j=o}^{m}|a_j(\xi')|\neq 0$ se $|\xi'|>k$.

[2)] Si veda [18] .

$$\sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi')| \geq c_o|\xi'|^{\mu} \qquad \text{se} \quad |\xi'| > k+1 .$$

b) Se all'ipotesi su P(D) del Teorema 1.2.1 si sostituiscono le ipotesi più forti:

(1.2.1') $\qquad a_m(\xi') \neq 0 \quad \forall\, \xi' \in R^{n-1}$,

(1.2.1") esistano costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_2' \geq 0$, $\rho > \sigma' \geq 1$, tali che

$$(\xi',\tau) \in R^{n-1} \times C, \; P(\xi',\tau) = 0 \text{ implicano}$$

$$\mathrm{Im}\,\tau \geq - c_1(1+|\xi'|^{1/\rho}) \quad \text{oppure} \quad \mathrm{Im}\,\tau \leq - c_2|\xi'|^{1/\sigma'} + c_2' ,$$

allora $E \in \mathscr{D}'(R;\, s^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ e la (1.2.2) vale con $\sigma_n = p\sigma'$,
$p = \max_{o \leq j \leq m-1} (\mu + m_j)/(m-j) \geq 1/\sigma'$, $a = \max(0,\mu)$, ove μ è un numero reale, esistente in virtù dell'ipotesi (1.2.1'), tale che

$$|a_m(\xi')| \geq c_o(1+|\xi'|)^{\mu} \quad , \quad \xi' \in R^{n-1} .$$

c) I risultati precedenti valgono anche per $\rho = +\infty$, ove si intenda di porre $1/\rho = 0$ e di sostituire $\mathscr{D}'(R;\gamma_o^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ e $\mathscr{D}'(R;\, s^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ rispettivamente con $\mathscr{D}'(R^n)$ e $\mathscr{D}'(R;\mathscr{S}'(R^{n-1}))$.

d) Utilizzando opportuni spazi di distribuzioni generalizzate, l'esistenza di una soluzione fondamentale soddisfacente alle i), ii), iii) è stata provata in [40] anche quando P(D) soddisfi alla (1.2.1) con ρ e σ' tali che $\rho > \sigma' > 0$.

1.2.3. ESEMPI.

a) Un esempio di operatori soddisfacenti alle (1.2.1') e (1.2.1") sono gli operatori che possono chiamarsi ρ-corretti (corretti quando $\rho = +\infty$) secondo Petrovskiĭ rispetto al semispazio H .[3] Per questi è $a_m(\xi') \equiv 1$ e

[3] Si veda I.M.Gel'fand - G.E. Šilov [17] .

vale sempre la prima delle diseguaglianze in (1.2.1"), onde supp $E \subset H$. Casi particolari di essi sono gli operatori ρ-iperbolici rispetto al vettore $(0,\ldots,0,1)$, studiati da E. Larsson [26] e gli operatori parabolici nel senso di G.E. Šilov. Per i primi si suppone che il vettore $(0,\ldots,0,1)$ sia non caratteristico. Per essi supp E è contenuto in un cono chiuso e convesso con vertice l'origine di R^n, contenuto (tranne il suo vertice) nell'interno di H e contenente $(0,\ldots,0,1)$. Per i secondi si suppone che sia sempre

$$\mathrm{Im}\,\tau \geq c_1 |\xi'|^{1/\sigma'} - c_2' ,$$

se $P(\xi',\tau) = 0$. Per questi ultimi operatori valgono evidentemente risultati come quelli del Teorema 1.2.1 con H sostituito da $\complement H$; dunque supp $E \subset H$ e (1.2.2) vale per tutti gli x interni ad H.

b) Si può provare che se $(0,\ldots,0,1)$ non è caratteristico per $P(D)$ [4] e $P(D)$ soddisfa alla (1.2.1') con $\sigma' = \sigma_n = 1$, allora esiste una costante positiva c tale che, indicata con P_m la parte principale di P,

$$(\xi',\tau) \in R^{n-1} \times C,\ P_m(\xi',\tau) = 0 \ \text{ implicano}$$

(1.2.3)

$$\mathrm{Im}\,\tau = 0 \ \text{ oppure } \ |\mathrm{Im}\,\tau| \geq c\,(|\xi'| + |\mathrm{Re}\,\tau|).$$

Viceversa, se P ha parte principale P_m soddisfacente ad (1.2.3), allora $(0,\ldots,0,1)$ è non caratteristico per P e per delle costanti positive k, c_1, c_2

$$(\xi',\tau) \in R^{n-1} \times C, |\xi'| > k,\ P(\xi',\tau) = 0 \ \text{ implicano}$$

$$|\mathrm{Im}\,\tau| \leq c_1 |\xi'|^{(m-1)/m} \ \text{ oppure } \ |\mathrm{Im}\,\tau| \geq c_2(|\xi'| + |\mathrm{Re}\,\tau|).$$

---

[4] In tal caso è ovviamente $m_j \leq m-j$, $j = 0,\ldots,m$.

I polinomi omogenei soddisfacenti a (1.2.3) si dicono, secondo una definizione di J. Fehrman [16], ibridi iperbolico-ellittici rispetto al vettore $(0,\dots,0,1)$. La condizione (1.2.3) è evidentemente soddisfatta se P_m è ellittico, se P_m è iperbolico rispetto al vettore $(0,\dots,0,1)$ e se P_m è prodotto di polinomi così fatti. In particolare è soddisfatta da tutti i polinomi omogenei in due variabili, per i quali $(0,\dots,0,1)$ non è caratteristico. Da Fehrman è provato inoltre che se P_m è iperbolico-ellittico rispetto al vettore $(0,\dots,0,1)$, allora esiste un cono aperto V contenente $(0,\dots,0,1)$ e di vertice l'origine, tale che se $\eta \in V$

$$\xi \in R^n,\ t \in R,\ P_m(\xi + it\eta) = 0 \ \text{implicano}$$
$$t = 0 \ \text{oppure} \ |t| \geq c(\eta)|\xi|$$

ove $c(\eta)$ è una funzione positiva limitata sui compatti di V. P_m soddisfa dunque ad una condizione come la (1.2.3) rispetto ad ogni vettore $\eta \in V$.
Se $(0,\dots,0,1)$ non è caratteristico per P e P soddisfa (1.2.1) con $\rho = +\infty$ e $\sigma' = \sigma_n = 1$, allora, come è provato da Fehrman, P ha una soluzione fondamentale analitica fuori del cono duale di V, ossia fuori del cono

$$V^* = \{x \in R^n ; \langle x,y \rangle \geq 0 ,\ \forall x \in V\} .$$

Lo stesso risultato dovrebbe valere se $\rho < \infty$; in tal caso la soluzione fondamentale di P dovrebbe appartenere a $\gamma_o^{(\rho)'}(R^n)$, anziché a $\mathscr{D}'(R^n)$ come nel caso $\rho = +\infty$.

c) Se P soddisfa ad una condizione del tipo della (1.2.1) con $\rho = +\infty$, e $\sigma', \sigma_n \geq 1$ uniformemente rispetto a tutti i vettori η contenuti in un cono proprio aperto e convesso V di vertice l'origine e contenente $(0,\dots,0,1)$, allora si può provare [5)] che esiste una soluzione fondamentale E di P che è C^∞ fuori di V^*, anzi, con procedimenti simili a quelli usati per provare

---

[5)] Si veda T.Shirota [35], L. Hörmander [20]

il Teorema 1.2.1, si può provare [6] che sing $\text{supp}_\sigma\ E \subset V^*$. [7]

1.2.4 COROLLARIO. Supposto che P(D) soddisfi alla (1.2.1), allora per ogni $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ con $\text{supp}\ f \subset H$ esiste una soluzione $u \in \mathscr{D}'(R;\ \gamma_o^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ dell'equazione $P(D)u = f$ con sing $\text{supp}_\sigma\ u \subset H$.

Infatti, se E è la soluzione fondamentale di P(D) del Teorema 1.2.1 basta porre $u = E * f$.

1.3. LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.2.1 è fondata sul seguente lemma

1.3.1 LEMMA [10] . Se P(D) soddisfa alla (1.2.1), allora per ogni numero $\nu \in\ ]0,1[$ esiste una funzione $v(x;\nu), x \in R^n$, soluzione della equazione

$$P(D)u = \mathscr{F}_\xi^{-1}(e^{-\nu|\xi|^2})(x) = (4\pi\nu)^{-n/2} e^{-|x|^2/4\nu}, \quad x \in R^n,$$

tale che

i) $v \in C^\infty(R^n)$

ii) per ogni $r > 0$ esiste una costante $c > 0$ indipendente da ν tale che per ogni $\phi \in C_o^\infty(R;\gamma_o^{(\rho)}(R^{n-1}))$ con $\text{supp}\ \phi \subset K_r = \{x \in R^n; |x'| \leq r, |x_n| \leq r\}$ ed ogni $s \geq c_1 r+1$

$$\left|\int_{R^n} v(x;\nu)\phi(x)dx\right| \leq c \{\sup_{x_n} [D_n^m \hat{\phi}(\cdot,x_n)]_{K_r,s} + \sup_{x_n} [\hat{\phi}(\cdot,x_n)]_{K_r,0}\} \quad [8]$$

iii) esistono costanti $c' > 0$ ed $a \geq 0$ indipendenti da ν tali che per ogni $x \in \complement H$ ed ogni $\alpha \in Z_+^n$

$$|D_x^\alpha v(x;\nu)| \leq c'^{|\alpha|+1} [\chi\Gamma(<\alpha,\sigma>+1)|x_n|^{-(n-1+a)\sigma'-m\sigma_n-<\alpha,\sigma>} +$$

$$+ \Gamma(\alpha/2+1)e^{|x'|}\nu^{(m+n+a+|\alpha|)/2}e^{-x_n^2/8\nu}],$$

---

[6] Si veda D.Mari [28] .

[7] Si noti che il Teorema 1.2.1 si può vedere come caso limite di quello qui descritto.

[8] Qui $\hat{\phi}(\zeta',x_n) = \int_{R^n} e^{-i<x',\zeta'>}\phi(x',x_n)dx'$.

ove χ indica il massimo numero delle radici dell'equazione in τ $P(\xi',\tau)=0$, soddisfacenti per $|\xi'|> k$, alla seconda delle diseguaglianze in (1.2.1). Dalla ii) di questo lemma segue che per una successione $\nu_k \to 0+$ il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{R^n} v(x;\nu_k)\phi(x)dx$$

esiste per ogni $\phi \in C_o^\infty(R;\gamma_o^{(\rho)}(R^{n-1}))$. Posto allora

$$E(\phi) = \lim_{k \to +\infty} \int_{R^n} v(x;\nu_k)\, \phi(x)dx, \quad \phi \in C_o^\infty(R;\gamma_o^{(\rho)}(R^{n-1})),$$

si ha $E \in \mathscr{D}'(R,\gamma_o^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ e

$$E(P(-D)\phi) = \lim_{k\to +\infty} \int_{R^n} P(D)v(x;\nu_k)\phi(x)dx = \phi(0).$$

La (1.2.2) del Teorema 1.2.1 segue dalla iii) del lemma qui sopra.

1.4. *UN INDEBOLIMENTO DELLA CONDIZIONE* (1.2.1).

Si può osservare che la condizione (1.2.1) non è una condizione necessaria affinchè $P(D)$ abbia una soluzione fondamentale E con sing $\text{supp}_\sigma\, E \subset H$. Per mostrare questo possiamo servirci delle considerazioni e di un esempio riportati da L.Hörmander in [19] , per mostrare che la condizione di correttezza di $P(D)$ rispetto al semispazio H non è necessaria affinchè P abbia una soluzione fondamentale con supporto contenuto in H.

Si comincia con l'osservare che se E è una soluzione fondamentale di $P(D)$ con sing $\text{supp}_\sigma\, E \subset H$ e $\theta \in C$, allora $E_\theta = e^{-i<x,\theta>}E$ è soluzione fondamentale dell'operatore $P(D+\theta)$ ed è ancora sing $\text{supp}_\sigma E_\theta \subset H$.

Una condizione che possa essere necessaria affinchè $P(D)$ abbia una soluzione fondamentale con supporto singolare contenuto in H, dovrà quindi essere sod-

disfatta da ogni polinomio $P(D+\theta)$, $\theta \in C$, una volta che si supponga soddisfatta da $P(D)$. Ciò tuttavia non accade per la condizione (1.2.1).
Infatti l'operatore di Schrödinger su R^2: $P(D) = - D_1^2 + D_2$ è tale che se $P(\xi_1,\tau) = 0$, allora $\operatorname{Im}\tau = 0$, qualunque sia $\xi_1 \in R$. P soddisfa dunque ad (1.2.1) con $\rho = +\infty$ e quindi secondo il Teorema 1.2.1 ha una soluzione fondamentale $E \in \mathscr{D}'(R^n)$ con supp $E \subset H$ (è un operatore corretto secondo Petrovskiĭ).
E è quindi tale che sing supp$_a E \subset H$. Tuttavia scelto $\theta = (i,0)$ l'operatore $P(D+\theta)$ non soddisfa alla (1.2.1) per alcun $\rho > 1$ e $\sigma' = \sigma_n = 1$, poichè $P(\xi_1+i,\tau) = 0$ implica $\operatorname{Im}\tau = 2\xi_1$ e $\operatorname{Re}\tau = \xi_1^2 - 1$.
D'altra parte, se ci si limita a soluzioni fondamentali con crescenza controllata rispetto ad x_n, vale il seguente risultato

1.4.1 TEOREMA [44] .
Sia $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$ e sia $A = \{\xi' \in R^{n-1};\ \sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi')| = 0\}$.
Dati $\rho > 1$ e $c \geq 0$ indichiamo con $\Sigma_{\rho,c}$ l'insieme di tutte le ultradistribuzioni $u \in \mathscr{D}'(R;\ s^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ tali che

$$\exp(- c(1+|\xi'|^2)^{1/2\rho} x_n)\hat{u}(\xi',x_n) \in \mathscr{S}'(R^n).$$

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

i) $P(D)$ ha una soluzione fondamentale $E \in \Sigma_{\rho,c_1}$ con supp $E \subset H$;
ii) $P(D)u = f$ ha una soluzione $u \in \Sigma_{\rho,c_1}$ con supp $u \subset H$, per ogni $f \in \Sigma_{\rho,c_1}$ con supp $f \subset H$;
iii) $(\xi',\tau) \in (R^{n-1} \setminus A) \times C$, $P(\xi',\tau) = 0$ implicano $\operatorname{Im}\tau \geq -c_1(1+|\xi'|^2)^{1/2\rho}$.

Questo teorema, che estende un precedente risultato di A. Enqvist [15] relativo al caso $\rho = +\infty$, $c_1 = 0$, [9] è ottenuto utilizzando il seguente lemma provato in [15] con l'aiuto del teorema di risoluzione delle singolarità di Hironaka,

[9] Si veda anche R.B.Melrose [31] .

nella versione datane da M.F.Atiyah [3] .

1.4.2 LEMMA. Sia a un polinomio in ν variabili con coefficienti complessi e sia $A = \{ \xi \in R^\nu ; a(\xi) = 0\}$. Allora esiste una costante positiva c ed un intero non negativo ℓ tale che

$$\sup_{\xi \in R^\nu \setminus A} |\psi(\xi)/a(\xi)| \leq c(\int_{R^\nu} (1+|\xi|^2)^\ell \sum_{|\alpha| \leq \ell} |D^\alpha \psi(\xi)|^2 d\xi)^{1/2},$$

per ogni $\psi \in \mathcal{S}(R^\nu)$ tale che ψ/a sia limitato su $R^\nu \setminus A$.

Questo lemma ed i procedimenti utilizzati per provare il Teorema 1.2.1 consentono di provare che le conclusioni di questo teorema continuano a valere sotto ipotesi per $P(D)$ più deboli di (1.2.1).

Precisamente si può provare che

1.4.3 TEOREMA [7] . Siano $P(D)$ ed A come nel Teorema 1.4.1. Se esistono $k > 0$, $\rho > \sigma' \geq 1, \sigma_n \geq 1$ e due costanti positive c_1, c_2 tali che $P(D)$ soddisfa alla

$$(\xi', \tau) \in (R^{n-1} \setminus A) \times C, |\xi'| > k, P(\xi', \tau) = 0 \text{ implicano}$$

(1.4.1)

$$\operatorname{Im} \tau \geq - c_1 |\xi'|^{1/\rho} \text{ oppure } \operatorname{Im} \tau \leq - c_2(|\xi'|^{1/\sigma'} + |\operatorname{Re} \tau|^{1/\sigma_n}),$$

allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R; \gamma_o^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ di $P(D)$ tale che sing supp $E \subset H$ e valgono ancora le ii), iii) del Teorema 1.2.1.

Se di più in luogo di (1.4.1) $P(D)$ soddisfa alla

$$(\xi', \tau) \in (R^{n-1} \setminus A) \times C, P(\xi', \tau) = 0 \text{ implicano}$$

(1.4.1')

$$\operatorname{Im} \tau \geq -c_1(1+|\xi'|^{1/\rho}) \text{ oppure } \operatorname{Im} \tau \leq -c_2(|\xi'|^{1/\sigma'} + |\operatorname{Re} \tau|^{1/\sigma_n} + c_3)$$

con $c_3 > \max_{\xi' \in R^{n-1}} \{[c_1 c_2^{-1} (4+|\xi'|^{1/\rho})]^\sigma - |\xi'| \}, c_1 < 2^{-9} c_2$, allora $E \in \Sigma_{\rho, 4c_1}$.

Quando $A \subset \{\xi' \in R^{n-1}; |\xi'| \leq k\}$ la prima parte di questo teorema fornisce il risultato del Teorema 1. 2.1. Come osservato più sopra ciò accade sempre se n=2.

1.5. ALCUNI PROBLEMI.

1.5.1. CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI.

a) Un primo problema è suggerito dal confronto fra il Teorema 1.4.3 ed il Teorema 1.4.1. La condizione (1.4.1') è anche necessaria affinchè esista una soluzione fondamentale E per $P(D)$ tale che

$$\text{sing supp}_\sigma E \subset H \text{ ed } E \in \Sigma_{\rho,c'} \text{ per qualche } c' > 0?$$

b) In [19] Hörmander prova il seguente risultato

TEOREMA. Siano $P(D)$ ed H come nel Teorema 1.4.1. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) $P(D)$ ha una soluzione fondamentale di ordine finito, con supporto contenuto in H;

ii) esistono costanti $c_1 > 0$ e $c_2 \in R$ tali che per ogni soluzione $\tau(\zeta')$ dell'equazione $P(\zeta',\tau) = 0$ che sia analitica (e ad un sol valore) in una sfera B in C^{n-1} con centro reale e raggio c_1

$$\sup_{\zeta' \in B} \text{Im } \tau(\xi') > c_2;$$

iii) l'equazione $P(D)u = f$ ha una soluzione $u \in \mathcal{D}'_F(R^n)$ con supporto in H, per ogni $f \in \mathcal{D}'_F(R^n)$ con $\text{supp } f \subset H$.

E' possibile trovare una condizione necessaria e sufficiente affinchè $P(D)$ abbia una soluzione fondamentale E in $\mathcal{D}'_F$, o più in generale in uno spazio di ultradistribuzioni, tale che $\text{sing supp}_\sigma E \subset H$? La stessa estensione del

Teorema di Hörmander al caso di soluzioni fondamentali ultradistribuzioni appare non immediata. Per le considerazioni svolte in 1.4 la condizione necessaria e sufficiente cercata dovrebbe essere invariante per traslazioni complesse su P(D), come è la ii) del Teorema di Hörmander enunciato qui sopra.

1.5.2 ESISTENZA DI SOLUZIONI CON SUPPORTO SINGOLARE CONTENUTO IN H .

Come estendere il risultato del Corollario 1.2.4, ossia quali condizioni, meno forti di quelle richieste da questo Corollario, si possono imporre a P(D) ed f affinchè esista una soluzione u dell'equazione P(D)u=f con sing $supp_\sigma$ u $\subset$H? Come casi particolari si dovrebbero ottenere la ii) del Teorema 1.4.1 e la iii) del Teorema di Hörmander citato in 1.5.1 b).

1.5.3. ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE FONDAMENTALE CON SUPPORTO SINGOLARE FUORI DI UN CONO CONVESSO.

Quali condizioni sono sufficienti affinchè, dato $\sigma \geq 1$ ed un cono aperto e convesso V di vertice l'origine, P(D) abbia una soluzione fondamentale E con sing $supp_\sigma$ E $\subset R^n \setminus V$? Quali condizioni sono per questo necessarie?

2. POLINOMI DIFFERENZIALI Γ^d-SURIETTIVI.

2.1. Il problema della suriettività di un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti P(D) su R^n, rispetto a vari spazi di funzioni o di distribuzioni su un aperto $\Omega \subset R^n$ è stato studiato da vari autori a partire dal lavoro [27] di B.Malgrange.

Ci limiteremo prevalentemente a considerare il caso in cui $\Omega = R^n$.

Partiamo dall'osservare che mentre, come è ben noto,[10] per ogni P(D) è $P(D)\, C^\infty(R^n) = C^\infty(R^n)$ e $P(D)\, \gamma^{(d)}(R^n) = \gamma^{(d)}(R^n)$, $d \geq 1$, lo stesso risultato non vale quando si consideri lo spazio $\mathcal{A}(R^n) = \Gamma^1(R^n)$ delle funzioni analitiche su R^n, se $n > 2$. Più precisamente è stato provato che per ogni P(D) è ancora

$$P(D)\mathcal{A}(R^2) = \mathcal{A}(R^2) \quad {}^{11)},$$

mentre, se $n > 2$, esistono operatori P(D) e funzioni f analitiche in R^n tali che l'equazione $P(D)u = f$ non ha alcuna soluzione analitica in R^n [12]. Si presenta quindi il problema di trovare condizioni necessarie, condizioni sufficienti e possibilmente necessarie e sufficienti su P(D) affinchè risulti

$$P(D)\mathcal{A}(R^n) = \mathcal{A}(R^n) \tag{2.1.1}$$

e, più in generale, il problema di trovare condizioni su P(D) e su $f \in \mathcal{A}(R^n)$ affinchè esista $u \in \mathcal{A}(R^n)$ tale che $P(D)u = f$.

Un risultato riguardante quest'ultimo problema è contenuto in [9].[13]

Una condizione sufficiente affinchè valga (2.1.1) è formulata da K.Andersson [1]. Un'altra condizione sufficiente è contenuta in [6]. Per enunciare tali condizioni richiamiamo alcune definizioni.

---

10) Si veda per es. [37]

11) Si veda [14]

12) Si veda [14], [12], e [34].

13) Si veda anche [6], Teorema 4.4 e Corollario 4.5.

2.1.1 DEFINIZIONE [4] . Sia P un polinomio omogeneo in n variabili e sia ξ^o un suo vettore caratteristico reale, sia cioè $\xi^o \in R^n \setminus \{0\}$ e $P(\xi^o) = 0$. P si dice localmente iperbolico in ξ^o se esiste un vettore $N \in R^n \setminus \{0\}$, un numero $\varepsilon > 0$ ed un intorno U_{ξ^o} , di ξ^o in R^n tali che

$$\xi \in U_{\xi^o}\ ,\ \tau \in C, |\tau| < \varepsilon\ ,\ P(\xi + \tau N) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\tau = 0\ .$$ [14)]

2.1.2 DEFINIZIONE [21] . Un polinomio omogeneo che sia localmente iperpolico in ogni suo vettore caratteristico reale si dice localmente iperbolico. Esempi di polinomi omogenei localmente iperbolici sono, oltre ai polinomi omogenei ellittici, a quelli iperbolici ed ai prodotti di questi, i polinomi ibridi iperbolico-ellittici indicati in 1.2, i polinomi omogenei reali di tipo principale e tutti i polinomi omogenei in due variabili.
Il risultato di Andersson citato sopra è il seguente

2.1.3 TEOREMA [1] . Se P(D) ha parte principale localmente iperbolica, allora qualunque sia n è $P(D)\mathcal{A}(R^n) = \mathcal{A}(R^n)$.

Allo studio delle condizioni su P(D) affinchè si verifichi (2.1.1) è dedicato un lavoro [21] di L. Hörmander, ove più in generale si studia la suriettività di P(D) nello spazio $\mathcal{A}(\Omega)$. In tale lavoro si prova fra l'altro il seguente risultato.

2.1.4 TEOREMA [21] . Condizione necessaria e sufficiente affinchè $P(D)\mathcal{A}(R^n) = \mathcal{A}(R^n)$ è che esista una costante c tale che: per ogni funzione ϕ plurisubarmonica in C^n

a) $\phi(\zeta) \leq |\zeta|\ \ \forall\ \zeta \in C^n$; $\phi(\xi) \leq 0\ \ \forall\ \xi \in R^n$ tale che $P_m(\xi) = 0$
implichi

b) $\phi(\zeta) \leq c|\operatorname{Im}\zeta|\ \forall\ \zeta \in C^n$ tale che $P_m(\zeta) = 0$,

ove con P_m si è indicata la parte principale di P(D).

---

14) Od anche $\xi \in U_{\xi^o}$, $t \in R$, $0 < |t| < \varepsilon \Rightarrow P(\xi + itN) \neq 0$.

Per la sua analogia con casi classici, alla implicazione a) $\Rightarrow$ b) è dato il nome di principio di Phragmén-Lindolöf. In [21] si danno alcune condizioni necessarie ed alcune condizioni sufficienti per il verificarsi di tale principio. In particolare si prova che esso vale se P ha parte principale P_m localmente iperbolica, ritrovando così il Teorema 2.1.3, ma che l'inverso vale soltanto se $n \leq 3$. Vale dunque il

2.1.5 TEOREMA [21] . Se $n \leq 3$ e $P(D)\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^n)$, allora P ha parte principale localmente iperbolica.

Si prova inoltre che a) non implica b) se la varietà caratteristica reale di P non ha dimensione $n-1$ in ogni suo punto, ossia per il Teorema 2.1.4 che

2.1.6 TEOREMA [21] . Condizione necessaria affinchè riesca $P(D)\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^n)$ è che la varietà caratteristica reale di P ossia la varietà

$$\{\xi \in R^n \setminus \{0\} \; ; \; P_m(\xi) = 0\}$$

abbia in ogni suo punto dimensione eguale ad $n-1$ (eguale alla sua dimensione complessa).

Questo risultato generalizza e chiarisce i controesempi al verificarsi di (2.1.1), indicati in [14] , [12] , [34] , costituiti dall'operatore del calore in R^3, e dagli operatori $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, $\partial/\partial x_1 + i\, \partial/\partial x_2$, considerati come operatori in R^3. E' ovvio inoltre che la condizione richiesta dal Teorema 2.1.6 è sempre soddisfatta se $n=2$.

A mia conoscenza mancano risultati del tipo di quelli ora indicati quando si consideri il problema del verificarsi di

$$(2.1.2) \qquad P(D)\, \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{(d)}(R^n) \quad \text{con } d > 1. \text{ [15]}$$

[15] Il caso $d \in]0,1[$ è studiato in [30] da A.Martineau.

Se (2.1.2) si verifica diremo che P è $\Gamma^{(d)}$-suriettivo.

Nelle righe che seguono è esposto un procedimento che consente di provare condizioni sufficienti su $P(D)$ affinchè si verifichi (2.1.2) per un assegnato d razionale e ≥ 1 .[16] Tale procedimento è uno sviluppo di quello che ha condotto a provare la (2.1.1) per $n=2$ in [14] , nonché i risultati di [9] , [10] , [6]per $n \geqslant 2$.

I risultati a cui si giunge sono ancora incompleti. Dal loro enunciato apparirà come le condizioni su $P(D)$ che qui si richiedono affinchè, per opportune $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$, esista una soluzione in $\Gamma^{(d)}(R^n)$ della equazione $P(D)u = f$ sono del tipo di quelle che assicurano la esistenza di soluzioni fondamentali per $P(D)$ con d-supporto singolare contenuto in un semispazio.

Il procedimento sopra indicato si fonda da un lato su una formula di rappresentazione di una qualunque $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ mediante un opportuno nucleo G dipendente da un parametro e dall'altro sulla costruzione di una soluzione dell'equazione $P(D)v = G_1$ ove G_1 è un nucleo legato al nucleo G.

2.2. UNA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE PER FUNZIONI IN $\Gamma^{(d)}(R^n)$.

Sia $d = r/s \geq 1$, con r,s numeri interi positivi relativamente primi e sia $\bar{n} \geq 1$ un numero naturale tale che $n/2s + \bar{n}/2r > 1$. Poniamo

$$Q(\xi,\tau) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\Big)^s + \Big(\sum_{h=1}^{\bar{n}} \tau_h^2\Big)^r, \quad \xi \in R^n, \ \tau \in R^{\bar{n}}$$

e sia E la distribuzione su $R^{n+\bar{n}}$ definita da

$$\text{(2.2.1)} \quad \langle E,\phi \rangle = (2\pi)^{-(n+\bar{n})} \int_0^{+\infty} d\nu \int_{R^{n+\bar{n}}} e^{-\nu Q(\xi,\tau)} \hat{\phi}(-\xi,-\tau)\,d\xi\,d\tau \ , \phi \in C_o^\infty(R^{n+\bar{n}}).$$

---

[16] Rinviamo per maggiori dettagli a [8] .

Questa distribuzione fornisce il nucleo mediante il quale si può rappresentare una qualunque $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$. Si utilizzano i seguenti lemmi.

2.2.1 LEMMA. La distribuzione E definita da (2.2.1) è una soluzione fondamentale dell'operatore differenziale

$$Q(D_x,D_t) = (\sum_{i=1}^{n} D^2_{x_j})^s + (\sum_{n=1}^{\bar{n}} D^2_{t_h})^r, \quad n/2s + \bar{n}/2r > 1.$$

Per $(x,t) \in R^{n+\bar{n}} \setminus \{(0,0)\}$ risulta inoltre $E(x,t) = \int_0^{+\infty} E(x,t;\nu)d\nu$ con $E(x,t;\nu) = \mathscr{F}^{-1}_{(\xi,\tau)}(e^{-\nu Q(\xi,\tau)})(x,t)$. E' poi $E \in C^\infty(R^{n+\bar{n}} \setminus \{(0,0)\})$ e valgono le seguenti maggiorazioni

$$|D^\alpha_x D^\beta_t E(x,t)| \le c^{|\alpha|+|\beta|+1}\, \Gamma(d|\alpha|+|\beta|+1)\, \cdot$$
$$\cdot\, (|x|^{2s}+|t|^{2r})^{1-(n+|\alpha|)/2s-(\bar{n}+|\beta|)/2r}$$

per ogni $(\alpha,\beta) \in Z^n_+ \times Z^{\bar{n}}_+$, $(x,t) \in R^{n+\bar{n}} \setminus \{(0,0)\}$, con c costante positiva;

$$|D^\alpha_x E(x,t)| \le c^{|\alpha|+1}(t,K)\, \Gamma(d|\alpha|+1), \quad x \in K,\ \alpha \in Z^n_+,\ t \in R^{\bar{n}} \setminus \{0\},$$

ove $c(t,K)$ è positiva, dipende dal compatto $K \subset R^n$ e con continuità da t e tende a $+\infty$ per $|t| \to 0$;

$$|D^\alpha_x E(x,t)| \le c^{|\alpha|+1}(x)\, \Gamma(|\alpha|+1), \quad t \in R^{\bar{n}},\ x \in R^n \setminus \{0\}$$

ove $c(x)$ dipende con continuità da x e tende a $+\infty$ per $|x| \to 0$.
Infine E è una funzione radiale di $x \in R^n \setminus \{0\}$, per ogni $t \in R^{\bar{n}}$ ed una funzione radiale di $t \in R^{\bar{n}} \setminus \{0\}$, per ogni $x \in R^n$ ed è

$$D^\alpha_x D^\beta_t E(x,t) \in L^1_{loc}(R^{n+\bar{n}}) \quad \text{se } |\alpha|/2s + |\beta|/2r < 1.$$

2.2.2 LEMMA. Sia $\bar{n} > 2r$ e sia $w \in C^\infty(R^{n+\bar{n}})$ tale che

$$\sup_{x\in R^n} \int_{R^{\bar n}} \{|Q(D_x,D_t)w(x,t) + \sum_{\substack{|\alpha|<2s\\|\beta|<2r}} (|D_x^\alpha w(x,t)|+|D_t^\beta w(x,t)|)\}\, dt < \infty.$$

Allora

$$w(x,t) = \int_{R^{n+\bar n}} E(x-y,t-z)Q(D_y,D_z)w(y,z)dy\, dz,\quad (x,t)\in R^{n+\bar n}.$$

2.2.3 LEMMA. Sia $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ e $Q(D_x,D_t)$ l'operatore considerato nel Lemma 2.2.1. Allora esiste un aperto $A\subset R^n\times R^{\bar n}$ e contenente l'insieme $\{(x,t)\in R^n \times R^{\bar n};\ t = 0\}$ed una funzione $u\in C^\infty(A)$ tale che

$$Q(D_x,D_t)u = 0 \qquad \text{in } A$$
$$u(x,t',0) = f^*(x,t'),\quad (x,t')\in R^n\times R^{\bar n-1}$$
$$D_{t_{\bar n}}^j u(x,t',0) = 0 \qquad (x,t')\in R^n\times R^{\bar n-1},\ j = 1,\dots,2r-1,$$

ove $f^*(x,t') = f(x)$ per $(x,t')\in R^n\times R^{\bar n-1}$, $t' = (t_1,\dots,t_{\bar n-1})$. Di più se $t\in R^{\bar n}$, $u(x,t) \in \Gamma^{(d)}(\{x\in R^n;\ (x,t)\in A\})$.

Ques'ultimo lemma è una conseguenza di un risultato provato da G. Talenti [36] e della ipoellitticità dell'operatore Q.

Fondandosi sui lemmi precedenti si prova il seguente teorema.

2.2.4 TEOREMA.[17] Sia $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$, $d = r/s \geq 1$, r,s interi positivi relativamente primi, e sia ϕ una data funzione positiva e non crescente su R. Allora esiste una funzione $g\in C^\infty(R^n\times R^+)$ ed una funzione ψ positiva non crescente e C^∞ su R tale che

$$f(x) = \int_{R^n} dy \int_0^{+\infty} G(x-y,\sigma)g(y,\sigma)d\sigma,\quad x\in R^n, \tag{2.2.2}$$

$$\text{supp } g \subset \{(y,\sigma)\in R^n\times R^+;\ \psi(|y|^2)\leq \sigma \leq 2\psi(|y|^2)\},$$

$$\int_0^{+\infty}|g(y,\sigma)|\, d\sigma \leq \phi(|y|^2),$$

---

[17] Per d=1 si veda [13].

ove $G(x,\sigma) = E(x,t)$ quando $|t| = \sigma > 0$, con $E(x,t)$ data da (2.2.1) ed $\bar{n} > 2r$.

Sia ora $\nu_o > 0$ e

$$G_1(x,\sigma) = \int_0^{\nu_o} E(x,t;\nu)\Big|_{|t|=\sigma} d\nu \quad , \; x \in R^n, \quad \sigma > 0,$$

$$G_2(x,\sigma) = \int_{\nu_o}^{+\infty} E(x,t,\nu)\Big|_{|t|=\sigma} d\nu \quad , \; x \in R^n, \quad \sigma \geq 0.$$

Poiché si prova facilmente che esiste una costante positiva c tale che

$$|D_x^\alpha G_2(x,\sigma)| \leq c^{|\alpha|+1} \Gamma(|\alpha|/2s + 1) \; , \; x \in R^n, \; \sigma \geq 0, \; \alpha \in Z_+^n \; ,$$

si conclude che se ϕ è scelta in modo che $\int_{R^n} \phi(|y|^2)dy < \infty$, la funzione

$$f_2(x) = \int_{R^n} dy \int_0^{+\infty} G_2(x - y, \sigma)g(y,\sigma)d\sigma \; , \quad x \in R^n \; ,$$

ove g è la funzione così indicata nel Teorema 2.2.4, appartiene a $\Gamma^{1/2s}(R^n)$ e quindi a $\gamma^{(d)}(R^n)$. Da questa osservazione, ricordando che $\gamma^{(d)}(R^n) \subset \Gamma^{(d)}(R^n)$ e che per ogni $P(D)$ su R^n è $P(D)\gamma^{(d)}(R^n) = \gamma^{(d)}(R^n)$, segue che il problema di trovare una soluzione $u \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ dell'equazione $P(D)u = f$, quando $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$, è ricondotto a quello di trovare una soluzione $u_1 \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ della equazione $P(D)u = f_1$ con

$$f_1(x) = f(x) - f_2(x) = \int_{R^n} dy \int_0^{+\infty} G_1(x-y,\sigma)g(y,\sigma)d\sigma, \; x \in R^n,$$

g essendo la funzione che entra nella formula di rappresentazione di f data nel Teorema 2.2.4.

2.3. COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $P(D)v = G_1$.

2.3.1 TEOREMA. Sia $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$, e sia $d = r/s \geq 1$, $\bar{n} > 2r$.
Supponiamo che esistano costanti $k > 1, \rho > d, c_1 > 0, c_2 > 0$ tali che $(\xi',\tau) \in R^{n-1} \times C, |\xi'| > k, P(\xi',\tau) = 0$ implichino

$$\text{Im}\,\tau \geq -c_1|\xi'|^{1/\rho} \quad \text{oppure} \quad \text{Im}\,\tau \leq -c_2(|\xi'| + |\text{Re}\,\tau|)^{1/d}. \tag{2.3.1}$$

Allora per ogni $\sigma > 0$ esiste una soluzione $H(\cdot,\sigma) \in C^\infty(R^n)$ della equazione $P(D)v = G_1(x,\sigma)$ tale che per ogni $\alpha \in Z_+^n$

$$|D_x^\alpha H(x,\sigma)| \leq c^{|\alpha|+1} e^{c'|x|} \sigma^{-d|\alpha|} \Gamma(d|\alpha|+1) \cdot \int_0^1 \nu^{-\frac{m+n+\mu}{2s} - \frac{\bar{n}}{2r}} \cdot \exp\{-c''\,\nu^{-1/(2r-1)}[\sigma^{2r/(2r-1)} - \tilde{c}(1+|x_n|)^{\frac{2s\rho}{2s\rho-1}} \nu^{\frac{2s\rho-2r}{(2s\rho-1)(2r-1)}}]\}d\nu$$

qualunque sia $x \in R^n$, e

$$|D_x^\alpha H(x,\sigma)| \leq c^{|\alpha|+1} e^{c'|x|} \Gamma(d|\alpha|+1),$$

per ogni $x \in R^n$ con $x_n < \delta$, $\delta < -\frac{\bar{n}}{2r} + 1$, ove $c, c', c'', \tilde{c}$ sono costanti positive indipendenti da x,σ,α e μ è un numero non negativo, esistente in conseguenza di (2.3.1), tale che

$$\sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi')| \geq c_3|\xi'|^{-\mu}, \quad |\xi'| > k+1,$$

con c_3 costante positiva.

Per la dimostrazione di questo teorema si fa uso del seguente lemma.

2.3.2 LEMMA. Supponiamo che $P(D)$, di ordine $\leq M$, soddisfi alle ipotesi del Teorema 2.3.1. Allora esiste $\nu_o \in\,]0,1[$ ed una funzione $v(x;\nu)$, definita in $R^n \times\,]0,\nu_o[$, tale che

i) $v(\cdot;\nu) \in C^\infty(R^n) \quad \forall\ \nu \in]0,\nu_o[$,

ii) $P(D)v = \mathscr{F}_\xi^{-1}(\exp(-\nu|\xi|^{2s}))(x) \quad \forall\ \nu \in]0,\nu_o[$,

iii) esistono costanti positive c,c',c'',c'_o e $\mu \geq 0$ indipendenti da x,ν,α tali che

$$|D_x^\alpha v(x;\nu)| \leq c^{|\alpha|+1} e^{c'|x|} \Gamma(|\alpha|/2s+1)\nu^{-(|\alpha|+m+n+\mu)/2s} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[16(c_1|x_n|)^{2s\rho/(2s\rho-1)}\nu^{-1/(2s\rho-1)} + c''|x_n|(1+|\log\nu|^d)^{M-m+1}\right]$$

per ogni $x \in R^n$, e

$$|D_x^\alpha v(x;\nu)| \leq c^{|\alpha|+1}\{e^{c'|x|}\Gamma(|\alpha|/2s+1)\nu^{-(|\alpha|+m+n+\mu)/2s} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-(x_n^{2s}/c'_o\nu)^{1/(2s-1)}/2\right] + |x_n|^{-(|\alpha|+m+n+\mu-1)d}\,\Gamma(|\alpha|d+1)\,\nu^{|x_n|}\}$$

per ogni $x \in R^n$ con $x_n < 0$.

Il Teorema 2.3.1 si prova ponendo per $x \in R^n$, $\sigma > 0$

$$H(x,\sigma) = \int_0^{\nu_o} v(x;\nu)\,\mathscr{F}_\tau^{-1}(\exp(-\nu|\tau|^{2r}))(t)\Big|_{|t|=\sigma} d\nu$$

ove $v(x;\nu)$ è la funzione così indicata nel Lemma 2.3.2, e notando che per opportune costanti positive c,c' è

$$|\mathscr{F}_\tau^{-1}(\exp(-\nu|\tau|^{2r}))(t)| \leq c\,\nu^{-\bar{n}/2r}\exp\left[-c'(\nu^{-1/2r}|t|)^{2r/(2r-1)}\right] .$$

2.4. ALCUNI RISULTATI. [18]

Ponendo $u_1(x) = \int_{R^n} dy \int_0^{+\infty} H(x-y,\sigma)g(y,\sigma)d\sigma$ e ricordando quanto osservato alla fine del n. 2.2., si prova ora facilmente il seguente teorema.

2.4.1. TEOREMA. Supponiamo che $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$ soddisfi alla condizione (2.3.1) e sia $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$, $d = r/s \geq 1$, tale che per una funzione ϕ positiva e non crescente su R con $\int_{R^n} e^{c'|y|}\phi(|y|^2)dy < \infty$, ove c' è la costante così indicata nel Teorema 2.3.1, la corrispondente funzione g nella formula di rappresentazione (2.2.2) abbia

$$\text{supp}\, g \subset \{(y,\sigma) \in R^{n+1};\ y_n \geq c,\ \sigma \geq h(y_n)\} ,$$

ove c è una costante positiva ed h una funzione positiva e continua su R, allora esiste $u \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ tale che $P(D)u = f$.

2.4.2 COROLLARIO. $P(D)$ ed f siano come nel Teorema 2.4.1, ove soltanto la condizione su supp g sia sostituita, con le notazioni del Teorema 2.2.4, dalla

$$\text{supp}\, g \subset \{(y,\sigma) \in R^{n+1};\ |y| \leq cy_n,\ \psi(|y|^2) \leq \sigma \leq 2\psi(|y|^2)\} ,$$

con c costante > 1, allora esiste $u \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ tale che $P(D)u = f$.

2.4.3 TEOREMA [8] . Dati un polinomio differenziale $P(D)$ su R^n, $n \geq 2$, ed un numero razionale $d \geq 1$ supponiamo che esista un numero finito di vettori $N^j \in R^n \setminus \{0\}$, $j = 1,\ldots,\ell$ tali che

i) per ogni $j = 1,\ldots,\ell$

$$\xi \in R^n,\ t \in R,\ |\xi - \langle \xi, N^j\rangle N^j| \geq k,\ P(\xi + itN^j) = 0 \text{ implichino}$$

$$t \geq -c_1 |\xi - \langle \xi, N^j\rangle N^j|^{1/\rho} \text{ oppure } t \leq -c_2|\xi|^{1/d}$$

[18] Per il caso d=1 si veda [9] , [6] .

per delle costanti $k > 1, \rho > d, c_1 > 0, c_2 > 0$;

ii) esistano costanti $\gamma_j > 1$, $j = 1,\dots,\ell$, tali che

$$R^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j$$

con $\Delta_j = \{y \in R^n ; |y| < \gamma_j < y, N^j > \}$ $j = 1,\dots, \ell$.
Allora $P(D) \, \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{(d)}(R^n)$.

Per provare questo teorema si sceglie anzitutto la funzione ϕ del Teorema 2.2.4 in modo che $\int_{R^n} e^{c'|y|} \phi(|y|^2)dy < \infty$, ove c' è la costante così indicata nel Teorema 2.3.1 e si considera una C^∞-partizione dell'unità $\{\chi_j\}$, $j = 0,\dots,\ell$, subordinta al ricoprimento $\{\Delta_o, \Delta_1,\dots,\Delta_\ell\}$ di R^n, ove Δ_o è una sfera aperta centrata nell'origine di R^n e $\Delta_1,\dots,\Delta_\ell$ sono i coni aperti della condizione ii). Con le notazioni usate sopra si ha

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{R^n} dy \int_o^{+\infty} G_1(x-y,\sigma) \; \chi_j(y) g(y,\sigma)d\sigma = \sum_{j=0}^{\ell} h_j(x).$$

A ciascuna delle equazioni $P(D)u = h_j$ si applica poi il Teorema 2.4.1 dopo una rotazione che porti il vettore $(0,\dots,0,1)$ sul vettore N^j se $j=1,\dots,\ell$, ed anche una traslazione se $j=0$.

2.4.4 CASI PARTICOLARI. Qui sotto e nel seguito intenderemo che d sia un numero razionale.

a) La condizione ii) del Teorema 2.4.3 è certamente soddisfatta se i vettori N^j per cui vale i) sono tali che ogni $y \in R^n \setminus \{0\}$ si può scrivere come loro combinazione lineare a coefficienti non negativi.

Essa è pure soddisfatta se esiste un cono proprio V di vertice l'origine, aperto e convesso tale che la condizione i) è soddisfatta per tutti gli $N \in V \cup (-V)$.

b) Le condizioni i) e ii) del Teorema 2.4.3 sono ovviamente soddisfatte se P è un polinomio d'-ipoellittico, con $1 \leq d' \leq d$, od un polinomio ρ-iperbolico con $d < \rho \leq \infty$, rispetto ad un vettore N,[19] e quindi rispetto ad ogni vettore contenuto in un opportuno cono aperto di vertice l'origine e contenente N o nel suo opposto.

c) Tutti i polinomi con parte principale ibrida iperbolico-ellittica rispetto ad un vettore N[20] soddisfano alle condizioni i) ed ii) con $d=1$. Da ciò segue che per tutti tali polinomi P, in particolare per tutti i polinomi in due variabili, è $P(D)\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^n)$.

d) Sono Γ^d-suriettivi per ogni $d \geq 1$ tutti i polinomi ibridi iperbolico-ellitici considerati da Fehrman [16], poichè tali polinomi soddisfano alla condizione i) con $\rho = +\infty$ e $d = 1$ rispetto a tutti i vettori N^j contenuti in un cono aperto con vertice l'origine o nel suo opposto.

e) Sono evidentemente $\Gamma^{(d)}$-suriettivi tutti i polinomi che possono scriversi come prodotti di polinomi dotati di questa proprietà. In particolare sono $\Gamma^{(d)}$-suriettivi, per ogni $d \geq 1$ tutti i polinomi omogenei in due variabili.

f) Poichè, come si è già osservato in 1.2.3 b), ogni polinomio P in due variabili ha parte principale ibrida iperbolico-ellittica rispetto ad un suo vettore non caratteristico N, esso soddisferà[21] alla condizione i) del Teorema 2.4.3 con $\rho = m/(m-1)$ e $d=1$, se m è l'ordine di P, qualunque siano gli N^j contenuti in un opportuno cono aperto di vertice l'origine e contenente N, o nel suo opposto. Ciò prova che ogni polinomio P in due variabili di ordine m è $\Gamma^{(d)}$-suriettivo per ogni $d \in [1, \frac{m}{m-1}[$. Se quindi supponiamo inoltre che P sia $m/(m-1)$-ipoellittico, un tale P sarà $\Gamma^{(d)}$-suriettivo per ogni $d \geq 1$. E' il caso dell'operatore del calore.

---

[19] Per $N = (0,\ldots,0,1)$ si vede 1.2.3 a)

[20] Per $N = (0,\ldots,0,1)$ si vede 1.2.3 b)

[21] Si veda 1.2.3 b)

g) Dato $P(D) = \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha$ e $d=r/s$, $r \geq s$, r, s interi positivi relativamente primi, sia $m = \max_{\{\alpha; c_\alpha \neq 0\}} (r|\alpha'| + s\alpha_n)$ e $P_{m,d}(\xi) = \sum_{r|\alpha'|+s\alpha_n = m} c_\alpha \xi'^{\alpha'} \xi_n^{\alpha_n}$. Si può provare che se P soddisfa a (2.3.1) con $\rho = \delta d$, $\delta > 1$, e $P_{m,d}(0,1) \neq 0$, allora

$$(2.3.1') \qquad (\xi',\tau) \in R^{n-1} \times C,\ P_{m,d}(\xi',\tau) = 0 \ \text{implicano}$$

$$\operatorname{Im} \tau \geq 0 \ \text{oppure} \ \operatorname{Im} \tau \leq - c_2 |\xi'|^{1/d} .$$

Viceversa se P soddisfa a (2.3.1'), allora è $P_{m,d}(0,1) \neq 0$ e vale (2.3.1) con $\rho = md/(m-1)$.

Si può anche mostrare che nel caso di polinomi in due variabili la (2.3.1') è soddisfatta se $P_{m,d}(0,1) \neq 0$. Si conclude che se n=2 questa sola ipotesi su P, oltre a quella su f, sono sufficienti affinchè valgano le conclusioni del Teorema 2.4.1 e del Corollario 2.4.2.

2.5. *ULTERIORI RISULTATI*

a) Come si è accennato più sopra, Hörmander prova in [21] anche che: se $\Omega \subset R^n$ è aperto e convesso, allora una condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ è che per ogni compatto convesso $K \subset \Omega$ esista un altro compatto convesso K', con $K \subset K' \subset \Omega$, ed un $\delta > 0$ tale che ogni funzione plurisubarmonica ϕ definita in C^n che soddisfi alle

$$\phi(\zeta) \leq H_k(\operatorname{Im}\zeta) + \delta |\zeta| \quad \text{se} \quad \zeta \in C^n$$

$$\phi(\xi) \leq 0 \quad \text{se} \quad \xi \in R^n \ \text{e} \ P_m(\xi) = 0,$$

soddisfi anche alla

$$\phi(\zeta) \leq H_{K'}(\operatorname{Im}\zeta) \ \text{se} \ \zeta \in C^n,\ P_m(\zeta) = 0.$$

b) In [22]è provato che se Ω è un aperto limitato e P-convesso di R^2, ossia tale che l'intersezione di ogni linea caratteristica di $P(D)$ con Ω è un intervallo, allora $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.[22] Lo stesso risultato si trova in [38] nel caso in cui Ω sia un qualunque aperto di R^2. In [39] si mostra inoltre che la P-convessità è, per un qualunque aperto $\Omega \subset R^n$, condizione necessaria affinchè sia $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

c) I risultati di Hörmander riportati più sopra sono stati estesi al caso dei sistemi sovradeterminati da A.Andreotti e M. Nacinovich [2].[23] Nel caso particolare di una sola equazione essi ottengono, come corollario dei loro risultati, che per ogni aperto convesso di R^2 e per ogni operatore $P(D)$ è $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

d) Una formula di rappresentazione analoga alla (2.2.2) è stata provata in [41] e [42] per funzioni analitiche rispettivamente in un aperto limitato ed in un cono aperto e proprio di R^n. La seconda di tali formule è stata utilizzata in [43] per mostrare l'esistenza di una soluzione analitica in un opportuno cono aperto, della equazione $P(D)u = f$ quando P ha parte principale iperbolica.

e) Risultati analoghi a quelli esposti nel n.2.4 si possono provare relativamente alla esistenza di soluzioni dell'equazione $P(D)u = f$ negli spazi $\Gamma^{(d)}(R^n)$, $d = (d_1,\ldots,d_n)$, d_j razionali > 1.[24]

2.6. ALCUNI PROBLEMI.

2.6.1 L'osservazione che le condizioni (2.3.1) e (1.2.1) con $\sigma' = \sigma_n = d$ coincidono, induce a chiedersi se la conclusione del Teorema 2.4.1 continui a valere con ipotesi su P meno restrittive della (2.3.1), ma atte a garantire l'esistenza di una soluzione fondamentale per P con d-supporto singolare contenuto nel semispazio $x_n \geq 0$. Da ciò anche l'interesse di studiare

---

[22] Altre condizioni sufficienti affinché sia $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ si trovano in [23].

[23] Si veda anche P.Miwa [32] .

[24] Si veda [29] .

il problema indicato in 1.5.1 b). Un primo problema si presenta già nel provare se è possibile sostituire la condizione (2.3.1) con la condizione (1.4.1).

2.6.2 La condizione (2.3.1) con $\sigma' = \sigma_n = 1$ non implica che il vettore $(0,\dots,0,1)$ sia non caratteristico per P. Analogamente la i) del Teorema 2.4.3 con $\sigma' = \sigma_n = 1$ non implica che i vettori N^j siano non caratteristici per P. Non è provato che ogni polinomio soddisfacente alle i), ii) del Teorema 2.4.3 con $\sigma' = \sigma_n = 1$ sia localmente iperbolico; né che esista un polinomio non localmente iperbolico soddisfacente a tali condizioni.

Un risultato più generale di quello del Teorema 2.4.3 si dovrebbe ottenere sostituendo in i) alle condizioni di tipo (2.3.1) rispetto ai vettori N^j, condizioni che assicurino l'esistenza di una soluzione della equazione $P(d)v = G_1$ appartenente a $\Gamma^{(d)}$ in un cono aperto e convesso V di vertice l'origine. Tali condizioni dovrebbero essere del tipo di quelle a cui si è accennato in 1.5.3 .[25)]

2.6.3 Resta aperto il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè $P(D)\mathcal{A}(R^n) = \mathcal{A}(R^n)$, quando $n > 3$. E' chiaro infatti che ogni polinomio prodotto di polinomi soddisfacenti (2.1.1) ancora soddisfa (2.1.1). Se $n > 3$ vi sono tuttavia polinomi prodotto di polinomi (omogenei) localmente iperbolici, e per i quali dunque vale (2.1.1), che non sono localmente iperbolici. Ciò accade per esempio se $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2)$ è considerato come polinomio in $n > 3$ variabili.

A questo proposito sembra utile osservare che se per un polinomio P(D) vale (2.1.1), lo stesso deve accadere per ogni polinomio $P(D+\theta)$ qualunque sia $\theta \in C^n$. Le condizioni necessarie affinchè valga (2.1.1), espresse mediante gli zeri di P, dovranno quindi essere invarianti per traslazione complessa di P.

[25)] Per d=1 si veda K.G.Andersson [1] .

Ciò effettivamente accade per le condizioni indicate nei Teoremi 2.1.4 e 2.1.6, tenuto conto che $P(D)$ e $P(D+\theta)$ hanno la stessa parte principale. La stessa osservazione vale per le condizioni affinchè valga (2.1.2).

2.6.4 Le condizioni su f formulate nel Teorema 2.4.1 e nel Corollario 2.4.2 dovrebbero essere espresse in modo indipendente dalla formula di rappresentazione (2.2.2). Si noti che, quando d=1, se f si può prolungare con una funzione f^* olomorfa in un aperto $A \subset C^n$ tale che, per una costante positiva c, $A_c = \{z \in C^n, |Im z| < c\} \subset A$, allora qualunque sia $P(D)$ esiste $u \in \mathcal{E}(R^n)$ tale che $P(D)u = f$.

Ciò segue dal fatto che, come conseguenza di un teorema di Malgrange, [26)] è $P(D)\ H(A_c) = H(A_c)$, $H(A_c)$ indicando lo spazio delle funzioni olomorfe in A_c. Una migliore formulazione delle condizioni indicate su f potrebbe anche ottenersi una volta migliorata opportunamente la formula di rappresentazione (2.2.2).

2.6.5 Manca un esempio, analogo a quelli considerati in [34] quando d=1, di un polinomio P per cui esistano $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$, $d > 1$, in corrispondenza alle quali non esiste alcuna $u \in \Gamma^{(d)}(R^n)$ con $P(D)u = f$. Un tale esempio, sulla cui esistenza ci sono attualmente a mia conoscenza soltanto delle congetture, fornirebbe chiarimenti su eventuali condizioni necessarie su $P(D)$ affinchè sia $P(D)\ \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{d}(R^n)$, quando $d > 1$. Una scelta alternativa sarebbe quella di cercare di provare che per ogni $P(D)$ è sempre $P(D)\ \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{(d)}(R^n)$.

2.6.6 Quando n=2 appare plausibile che per ogni $d \geq 1$ ed ogni $P(D)$ si abbia $P(D)\ \Gamma^{(d)}(R^2) = \Gamma^{(d)}(R^2)$. Ma questo risultato non è stato, a mia conoscenza ancora provato, anche se il Teorema 2.4.3 fornisce il risultato cercato per ampie classi di polinomi.

[26)] Si veda [27] .

2.6.7 Il problema formulato in 2.6.6 si può vedere come caso particolare di quello di provare che

$$P(D)\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^n) \Rightarrow P(D)\ \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{(d)}(R^n)\ ,\quad d > 1$$

o più in generale che

$$P(D)\ \Gamma^{(d')}(R^n) = \Gamma^{(d')}(R^n) \Rightarrow P(D)\ \Gamma^{(d)}(R^n) = \Gamma^{(d)}(R^n)\ ,\quad d > d' \geq 1.$$

Tali implicazioni dovrebbero valere anche se in luogo di R^n si considera un aperto convesso di R^n o forse un qualunque aperto di R^n.

2.6.8 I risultati elencati in 2.4 sono limitati al caso in cui d sia un numero razionale. Ciò è dovuto al metodo usato per la loro dimostrazione (soprattutto alla formula di rappresentazione usata per le $f \in \Gamma^{(d)}(R^n)$) od anche a ragioni intrinseche al problema? Si possono provare risultati sulla suriettività di un dato P(D) in spazi $\Gamma^{(d)}(R^n)$ con d irrazionale o, più in generale, in spazi di funzioni non quasi analitiche diversi dagli spazi di Gevrey?

2.6.9 Manca qualunque risultato, parallelo a quelli di Kawai [22] ed Hörmander [21] nel caso $d=1$, relativo alla esistenza di soluzioni $u \in \Gamma^{(d)}(\Omega)$, $d > 1$, di una data equazione $P(D)u = f$ con $f \in \Gamma^{(d)}(\Omega)$, quando Ω è un aperto, eventualmente convesso, di R^n.

2.6.10 Riguardo al problema indicato in 2.6.9 sarebbe interessante fornire, anche nel caso $d=1$, condizioni esplicite su P(D), affinchè sia $P(D)\ \Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{(d)}(\Omega)$, quando Ω è un assegnato semispazio. Non sembra che tali condizioni si possano ottenere, quando $d=1$, utilizzando la condizione necessaria e sufficiente di Hörmander [21] , indicata in 2.5. a).

2.6.11 Un problema più generale è quello di connettere risultati di esistenza di soluzioni in $\Gamma^{(d)}(\Omega)$ di $P(D)u = f$, con risultati di propagazione di singolarità per soluzioni della stessa equazione, anzichè con proprietà algebriche, forse difficilmente formulabili, del polinomio P.

3. *CONNESSIONI CON I SISTEMI SOVRADETERMINATI.*

3.1 Dato $P(D)$ in R^n e $d=r/s \geq 1$, si consideri un polinomio $Q(D,D_t)$ in R^{n+1} che sia quasi-ellittico di indici r/s rispetto ad x ed 1 rispetto a t. Sia poi w una data funzione definita in un intorno in R^{n+1} di un assegnato aperto $\Omega \subset R^n$. Il sistema sovradeterminato

$$(3.1.1)\qquad \begin{aligned} P(D)v &= w \\ Q(D,D_t)v &= 0 \end{aligned}$$

avrà soluzione in un intorno $U \subset R^{n+1}$ di Ω soltanto se

$$(3.1.2)\qquad Q(D,D_t)w = 0 \quad \text{in } U,$$

onde dovrà essere $w \in \Gamma^{(d,1)}(U)$.

Supponiamo che $P(D)$ ed Ω siano tali che $P(D)\,\Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{d}(\Omega)$ e che w soddisfi alla (3.1.2). Se m è l'ordine di Q rispetto a t poniamo

$$f_o(x) = w(x,0),\ f_j(x) = \partial_t^j\, w(x,0)\ ,\quad j = 1,\dots,m-1,\ x \in \Omega\ ,$$

e siano $u_o,\dots,u_{m-1}$ le soluzioni in $\Gamma^{(d)}(\Omega)$ delle equazioni $P(D)u = f_j$. Un teorema di Talenti [27] assicura poi che esiste una ed una sola soluzione $v \in \Gamma^{(d,1)}(U')$, U' intorno di Ω in R^{n+1}, del problema

$$Q(D,D_t)v = 0,\ \partial_t^j v(x,0) = u_j(x)\ ,\ j = 0,\dots,m-1,\ x \in \Omega.$$

Per questa v risulta

$$Q(D,D_t)(P(D)v) = 0 \qquad (x,t) \in U'\ ,$$

$$\partial_t^j (P(D)v)(x,0) = f_j(x) = \partial_t^j w(x,0),\ x \in \Omega\ ,\ j = 0,\dots,m-1$$

e quindi $P(D)v = w$ in $U \cap U'$, per l'unicità di soluzione del problema indicato sopra in $\Gamma^{(d,1)}$. La funzione v è quindi soluzione in un intorno di

---

[27] Si veda [36] .

Ω in R^{n+1} del sistema (3.1.1).

D'altra parte data $f \in \Gamma^{d}(\Omega)$, il citato teorema di Talenti assicura che in un intorno U in R^{n+1} di Ω esiste una w tale che

$$Q(D,D_t)w = 0 \ , \ w(x,0) = f(x), \ \partial_t^j w(x,0) = 0, \ x \in \Omega \ , \ j = 1,\ldots,m-1.$$

Se in corrispondenza a tale w il sistema (3.1.1) ha una soluzione v, necessariamente appartenente a $\Gamma^{(d,1)}$, in un intorno in R^{n+1} di Ω, allora la funzione $u(x) = v(x,0)$ è soluzione dell'equazione $P(D)u = f(x)$,$x \in \Omega$. Abbiamo dunque anche per $d > 1$ il seguente risultato esposto in [5] quando $d=1$.

3.1.1 TEOREMA. Sia $P(D)$ un polinomio differenziale su R^n, Ω un aperto di R^n e d un numero razionale ≥ 1. Sia poi $Q(D,D_t)$ un polinomio differenziale su R^{n+1}, $(d,1)$-quasi-ellittico. Allora, se $P(D)\ \Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{d}(\Omega)$ esiste per ogni w soddisfacente (3.1.2) in un intorno di Ω in R^{n+1}, un intorno V di Ω in R^{n+1} ed una $v \in \Gamma^{(d,1)}(V)$ soluzione di (3.1.1) in V . Viceversa se per ogni w soddisfacente (3.1.2) il sistema (3.1.1) ammette una soluzione v in un intorno in R^{n+1} di Ω , allora è $P(D)\ \Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{(d)}(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] *K.G. Andersson,* Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic funcions, Coll. on Analysis, Rio de Janeiro, August 1972, Analyse fonctionelle, Hermann 1974.

[2] *A. Andreotti-M.Nacinovich,* Analytic convexity and the principle of Phragmén-Lindelöf, Quaderni della Scuola Norm.Sup.Pisa cl.Sci. n.6(1979).

[3] *M.F. Atiyah ,* Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure Appl. Math. 23(1970), 145-150.

[4] *M.F. Atiyah -R. Bott-L. Gårding,* Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients II, Acta Math. 131(1973), 145-206.

[5] *L. Cattabriga,* Sull'esistenza di soluzioni analitiche reali di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti, Boll.Un.Mat.Ital.(4) 12(1975), 221-234.

[6] *L.Cattabriga,* Fundamental solutions with singular support contained in a cone or in a half-space. Applications. Confer.Sem.Mat.Univ. Bari, 151(1978), 1-24.

[7] *L.Cattabriga,* Some applications of Hironaka's theorem on the resolution of singularities to the study of a fundamental solution for linear partial diffe rential operators, Rend.Sem.Mat.Fis. Milano, 49(1979), 49-64.

[8] *L.Cattabriga,* Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients, Proceedings of the meeting on "Analytic solutions of partial differential equations", Trento 2-7 marzo 1981.

[9] *L.Cattabriga-E. De Giorgi,* Sull'esistenza di soluzioni analitiche di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti in un qualunque numero di variabili, Boll.Un.Mat.Ital. (4) 6(1972), 301-311.

[10] *L.Cattabriga-E. De Giorgi,* Soluzioni di equazioni differenziali a coefficienti costanti appartenenti in un semispazio a certe classi di Gevrey, Boll.Un. Mat.Ital. (4) 12(1975), 324-348.

[11] *Chin-Cheng Chou,* La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution, Lecture Notes in Math., 325, Springer 1973.

[12] *E. De Giorgi,* Solutions analytiques des équations aux dérivées partielles à coéfficients constants, Ecole Polytechnique, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-72, exposé n.29.

[13] *E. De Giorgi-L.Cattabriga,* Una formula di rappresentazione per funzioni analitiche in R^n, Boll.Un.Mat.Ital. (4) 4(1971), 1010-1014.

[14] *E. De Giorgi-L.Cattabriga,* Una dimostrazione diretta dell'esistenza di soluzioni analitiche nel piano reale di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti, Boll.Un.Mat.Ital. (4) 4(1971), 1015-1027.

[15] *A. Enqvist,* On tempered fundamental solutions supported by a convex cone, Ark. Mat. 14(1976), 35-41.

[16] *J. Fehrman,* Hybrids between hyperbolic and elliptic differential operators with constant coefficients, Ark.Mat. 13(1975), 209-235.

[17] *I.M. Gelfand-G.E. Shilov,* Generalized functions, vol. 3, Academic Press 1967.

[18] *L. Hörmander,* On the division of distributions by polynomials, Ark.Mat. 3 (1958), 555-568.

[19] *L. Hörmander,* On the characteristic Cauchy problem, Ann.of Math.88(1968), 341-370.

[20] *L. Hörmander,* On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl.Math. 23(1970), 329-358.

[21] *L. Hörmander,* On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Inventiones Math. 21(1973),151-182.

[22] *T. Kawai,* On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations I, J.Math.Soc. Japan 24(1972), 481-517.

[23] *T. Kawai,* On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations II, J.Math.Soc. Japan 25(1973), 644-647.

[24] *H. Komatsu,* Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization, J.Fac.Sci.Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20(1973), 25-105.

[25] *H. Komatsu,* Ultradistributions II. The Kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J.Fac.Sci.Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24(1977), 607-628.

[26] *E. Larsson,* Generalized hyperbolicity, Ark. Mat. 7(1966), 11-32.

[27] *B. Malgrange,* Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann.Inst.Fourier (Grenoble) 6(1955-56), 271-355.

[28] *D. Mari,* Costruzione di una soluzione fondamentale per operatori ibridi iperbolico-ipoellittici appartenente ad una classe di Gevrey fuori di un cono, Boll.Un.Mat.Ital. (5) 18-B (1981), 151-175.

[29] *D. Mari,* Esistenza di soluzioni in spazi di Gevrey anisotropi per equazioni differenziali a coefficienti costanti, in preparazione.

[30] *A. Martineau,* Equations différentielles d'ordre infini, Bull.Soc.Math. France 95(1967), 109-154.

[31] *R.B. Melrose,* The Cauchy problem with polynomial growth conditions for partial differential operators with constant coefficients, Duke Math.J. 42(1975), 491-494.

[32] *T. Miwa,* On the global existence of real analytic solutions of systems of linear differential equations with constant coefficients, Proc. Japan Acad. 49(1973), 500-502.

[33] *V.P. Palamodov,* Trasformate di Fourier di funzioni indefinitamente differenziali rapidamente crescenti, Trudy Moskov Mat. Obšč. 11(1962), 309-350.

[34] *L.C. Piccinini,* Non surjectivity of the Cauchy-Riemann operator on the space of the analytic functions on R^n. Generalization to the parabolic operators, Boll.Un.Mat.Ital. (4) 7(1973), 12-28.

[35] *T. Shirota,* On the propagation of regularity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc.J.Acad. 38(1962), 587-590.

[36] *G. Talenti,* Un problema di Cauchy, Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa Cl. Sci.(3) 18(1964), 165-186.

[37] *F. Treves,* Locally convex spaces and linear partial differential equations, Springer,1967.

[38] *G. Zampieri,* A sufficient condition for existence of real analytic solutions of P.D.E. with constant coefficients in open sets of R^2, Rend. Sem.Mat.Univ. Padova 63(1980), 83-87.

[39] *G. Zampieri,* A link between C^∞ and analytic solvability for P.D.E. with constant coefficients, Rend.Sem.Mat.Univ. Padova 63(1980), 145-150.

[40] *L. Zanghirati,* Sulla regolarità in semispazi di una soluzione fondamentale di certi operatori differenziali lineari a coefficienti costanti, Boll.Un. Mat.Ital. (5) 13-B(1976), 476-497.

[41] *L. Zanghirati,* Una formula di rappresentazione per funzioni analitiche in un insieme aperto limitato contenuto in R^n, Ann. Univ. Ferrara Sez.VII 20(1975), 165-186.

[42] *L. Zanghirati,* Complementi per una formula di rappresentazione per funzioni analitiche in un cono aperto di R^n, Ann.Univ. Ferrara Sez.VII 23(1977), 17-24.

[43] *L. Zanghirati,* Esistenza di una soluzione analitica in un cono per operatori differenziali lineari con parte principale iperbolica, Boll.Un.Mat.Ital. (5) 14-B(1977), 134-148.

[44] *L. Zanghirati,* Equazioni differenziali a coefficienti costanti aventi soluzioni in certe classi di distribuzioni generalizzate con supporto in un semispazio, Boll.Un.Mat.Ital. (5) 16-B(1979), 1-11.